Saraceno

42

Lineare Algebra I: Probeklausur

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2021

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name:	Joseph Saraceno
Matrikelnr.:	1234567

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen. Bitte heften Sie sie in diesem Fall bei der Abgabe der Klausur mit dem bereitgestellten Tacker wieder in der richtigen Reihenfolge zusammen.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Wenn Sie Ihr Ergebnis auf der Webseite zur Vorlesung einsehen möchten, bevor es im Studierendenportal sichtbar ist, benötigen Sie eine PIN. Ihre PIN lautet: $\boxed{\text{K21}}$

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

(a) Finden Sie für die Ebene

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \right\}$$

eine Darstellung der Form $E = \mathbf{v} + \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.

(b) Beschreiben Sie die in $\mathbb{R}^3$ gegebene Ebene

$$F := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 9x_2 & + & 3x_3 & & & & & = & 2 \\ 7x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & -3 \\ & & 3x_2 & + & 1x_3 & & & & & = & t \\ -7x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 4 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
Gegeben sind die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$V := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0\}$$
$$W := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ jeweils Basen von V bzw. W sind:

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}1/3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) \qquad \mathcal{C}' := \left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1/2\end{pmatrix}\right)$$

(b) Sei $F\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gegeben ist durch die Matrix

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}2 & 5\\2 & -1\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F)$!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die folgenden Relationen auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind **transitiv**:

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x > y$

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y = 0$

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$

(2) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} &\mapsto p \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto n \end{aligned}$

(3) Eine Abbildung $f \colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **surjektiv**, wenn gilt:

☐ Zu jedem $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert mindestens ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

☐ Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.

(4) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

☐ Ist g injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

☐ Ist g surjektiv und f bijektiv, so ist $f \circ g$ surjektiv.

☐ Ist f surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

(5) Für jede **Gruppe** $(G, \star)$ gilt:

☐ Es gibt ein $e \in G$, sodass für jedes $g \in G$ gilt $e \star g = g$.

☐ Es gibt ein $e \in G$, und für jedes $g \in G$ ein $g' \in G$, sodass gilt: $g' \star g = e$.

☐ Für alle $h, g_1, g_2 \in G$ gilt $h \star (g_1 + g_2) = h \star g_1 + h \star g_2$.

(6) Die folgenden Ringe sind Körper:

☐ $\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(7) In jedem **Körper** K gilt:

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha + \beta = 0$.

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K \setminus \{0\}$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

(8) Ein **Polynom** im Polynomring $K[t]$ über einem Körper K ist

☐ eine lineare Abbildung $K \to K$.

☐ eine formale Summe $a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K$.

☐ eine Abbildung der Form $t \mapsto a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in K$.

Aufgabe 5

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die **Skalarmultiplikation** auf einem K-Vektorraum ist eine Abbildung

☐ $V \times V \to V$.

☐ $K \times V \to V$.

☐ $V \times V \to K$.

(2) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)

☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

☐ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen als Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

(3) Sei V ein K-Vektorraum, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Unter einer **Linearkombination** von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ versteht man

☐ jede beliebige Summe der Form $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in K$.

☐ nur solche Summen $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in K \setminus \{0\}$.

☐ einen der vier Vektoren $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(4) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.

☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.

☐ Es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$.

(5) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

☐ $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = V$ und $\dim(V) = 3$.

☐ Alle $\mathbf{v}_i$ sind verschieden, und $\dim V = 3$.

☐ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existieren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.

(6) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ sind invertierbar:

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

☐ $\operatorname{rang}(A) \leqslant n$.

☐ A ist äquivalent zur Einheitsmatrix (d.h. es existieren invertierbare Matrixen T und S, sodass $S^{-1}AT$ die Einheitsmatrix ist).

☐ Die Zeilen von A bilden ein Erzeugendensystem von K^n.

Aufgabe 6
Wir fixieren einen Körper K. In der Sequenz

$$\{\mathbf{0}\} \xrightarrow{\alpha} U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\delta} \{\mathbf{0}\}$$

sei $\{\mathbf{0}\}$ der Nullvektorraum über K, weiter seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, und α, β, γ, δ seien K-lineare Abbildungen. Wir nehmen an, dass der Kern jeder Abbildung gleich dem Bild der vorherigen Abbildung ist, dass also gilt:

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta), \quad \mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Ker}(\gamma), \quad \mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Ker}(\delta)$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen folgt:

(a) Die Abbildungen α und δ sind die Nullabbildungen.

(b) Die Abbildung γ ist surjektiv.

(c) Die Abbildung β ist injektiv.

(d) $\dim V = \dim U + \dim W$.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: